东华理工大学2018年硕士生入学考试初试试题

科目代码：617；科目名称：《数学分析》；（A卷）

适用专业（领域）名称：070100 数学

一、计算题：（共12小题，每小题8分，共96分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$.

2. 设 $\varphi(x)$ 在点 a 连续，$f(x)=|x-a|\varphi(x)$，求 $f'_-(a)$ 和 $f'_+(a)$. 问在什么条件下 $f'(a)$ 存在？

3. 求积分 $\int e^{ax}\cos bxdx$.

4. 求由曲线 $y=x^2$ 和 $x=y^2$ 围成的图形的面积和该图形绕 x 轴旋转而成的几何立体的体积.

5. 求位于平面 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$ 和柱面 $x^2+y^2=1$ 的交线上且与 xOy 平面的距离最短的点的坐标.

6. 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 在 $x=0$ 点处带拉格朗日余项的泰勒公式.

7. 设 $f(x)$是周期为 2π的周期函数, 它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2} & -\pi\le x<-\dfrac{\pi}{2}\\ x & -\dfrac{\pi}{2}\le x<\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{\pi}{2} & \dfrac{\pi}{2}\le x<\pi\end{cases},$$

将 $f(x)$展开成傅里叶级数.

8. 确定幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}$ 的收敛域，并求和函数.

9. 计算积分 $\int_L xy^2dy-x^2ydx$, L 为以 R 为半径,圆心在原点的右半圆周, 从最上面一点 A 到最下面一点 B.

10．求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2y$ 所截得部分的曲面面积.

11. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}xyzdxdy$，其中Σ为球面 $x^2+y^2+z^2=1(x\ge0, y\ge0)$的外侧.

12. 计算曲面积分 $\oiint\limits_{S}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中 S 是锥面 $x^2+y^2=z^2$ 与平面 z=h 所围空间区域 $(0\le z\le h)$ 的表面，方向取外侧.

二、证明题：（共 4 小题，每小题 8 分，共 32 分）

13. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$,又问:它的逆命题是否成立?

14. 证明：若 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

15 设 $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ ，证明 $\{f_n(x)\}$ 于 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛；但对任一 $a>0$ ，$\{f_n(x)\}$ 于 $[a,+\infty)$ 上一致收敛.

16．设函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且有斜渐近线，即有数 b 与 c ，使得

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-bx-c]=0$$

证明: f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

三、综合题：（共 2 小题，每小题 11 分，共 22 分）

17. 设

$$\varphi(x,y,z)=\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ d+z & e+x & f+y \\ g+y & h+z & k+x \end{vmatrix},求\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 x}.$$

18. 证明： $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-a^2x^2}-e^{-b^2x^2}}{x^2}dx=\sqrt{\pi}\,(b-a)$.

(提示:证明中可利用公式 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$).