东华理工大学 2016 年硕士生入学考试初试试题

科目代码：601；科目名称：《高等数学》；（A 卷）

适用专业（领域）名称：化学、地球物理学、电路与系统、计算机科学与技术、环境科学与工程

一、选择题（共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求）

1、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, x\neq 0,\\ 1, \qquad x=0,\end{cases}$ 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）.

（A）可去间断点　（B）跳跃间断点　（C）第二类间断点　（D）连续点

2、若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且 $f(x)<g(x)$，则必有（　　）.

（A）$f(-x)>g(-x)$　（B）$f'(x)<g'(x)$

（C）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$　（D）$\int_0^x f(t)dt<\int_0^x g(t)dt$

3、点 $(1,3,-4)$ 关于平面 $3x+y-2z=0$ 的对称点是（　　）.

（A）$(5,-1,0)$　（B）$(5,1,0)$　（C）$(-5,-1,0)$　（D）$(-5,1,0)$

4、设 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)>0$，则（　　）

（A）$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值　(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(C) $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极小值　(D) $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值

5、设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ 等于（　　）

（A）$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$　（B）$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

（C）$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$　（D）$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

6、设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内连续，且满足 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{x^2+1-x\sin y-\cos^2 y}=-3$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处（　　）

(A) 取极大值　　(B) 取极小值

(C) 无极值　　(D) 不能确定是否有极值

二、填空题（共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1、$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x dx=$________.

2、由封闭曲线 $y^2=x^2(a^2-x^2)$ $(a>0)$ 围成的平面图形绕 oy 轴旋转得到旋转体，该旋转体的体积的积分表达式为________.

3、在 xoy 平面内，过原点且与直线 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-5}{1}$ 垂直的直线方程为________.

4、函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿 A 指向 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数为______.

5、设函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数，$f(x,2x^2-3x+4)=x$，$f_x(1,3)=2$，则 $f_y(1,3)=$____.

6、设 $f(u,v)$ 是二元可微函数，$z=f(\dfrac{y}{x},\dfrac{x}{y})$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________ .

三、（10 分）计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$.

四、（10 分）若 $f(0)=0$，$f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，证明：$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

五、（14 分）已知 $\varphi(x)$ 为连续函数，记 $f(x)$ 为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x[(t-1)\int_0^{t^2}\varphi(u)du]dt}{\ln(1+x^2)}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

六、(**12 分**) 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)e^y+f(y)e^x, x,y\in(-\infty,+\infty)$，且 $f'(0)$ 存在并等于 $a\neq 0$，证明：$f'(x)$ 存在，$x\in(-\infty,+\infty)$，并求 $f(x)$.

七、(**12 分**) 已知当 $x>0,t>0$ 时，函数 $f(x)$ 满足方程

$$\int_1^{xt} f(u)du = t\int_1^{x} f(u)du + x\int_1^{t} f(u)du,$$

且 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有连续一阶导数，又 $f(1)=7$，求 $f(x)$.

八、(**10 分**) 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{a+x^2y^2}-1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ $a>0$，在点 $(0,0)$ 的连续性.

九、(**10 分**) 设 $f(x)$ 为连续函数，$f(x)=e^{2x}+\int_0^x tf(x-t)dt$，求 $f(x)$.

十、(**12 分**) 设 $u=f(x,z)$，而 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z=x+y\varphi(z)$ 所确定的隐函数，其中 f 具有连续偏导数，而 φ 具有连续导数，求 du.

十一、(**12 分**) 设 $f(x,y)$ 为闭区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq y, x\geq 0\}$ 上的连续函数，且

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint_D f(u,v)dudv,$$

求 $f(x,y)$.