东华理工大学 2016 年硕士生入学考试初试试题

科目代码：617；　科目名称：《数学分析》；（ 正卷）

适用专业（领域）名称：　070100 数学

一、计算题：（共 10 小题，每小题 8 分，共 80 分）

1. 求下列数列的极限:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3+3^n}.$$

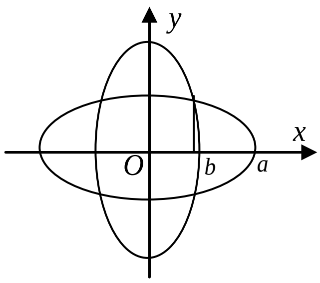
2．求下列极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}.$$

3. 计算不定积分$\int\sin^4 x\,dx$.

4．求两椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1\quad(a>0,b>0)$

所围公共部分的面积.



5. 确定幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}$的收敛域，并求和函数.

6. 设 $f(x)$是周期为 2π 的周期函数, 它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2} & -\pi\le x<-\dfrac{\pi}{2}\\ x & -\dfrac{\pi}{2}\le x<\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{\pi}{2} & \dfrac{\pi}{2}\le x<\pi\end{cases},$$

将 $f(x)$展开成傅里叶级数.

7. 求函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$在原点的偏导数 $f_x(0,0)$ 与 $f_y(0,0)$，并

考察 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的可微性.

8. 试求方程$x^2+u^2=f(x,u)+g(x,y,u)$所确定的函数的偏导数$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

9. 计算积分$\int_L xy^2dy-x^2ydx$, L 为以 a 为半径,圆心在原点的右半圆周从最上面一点 A 到

最下面一点 B.

10．求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所截得部分的曲面面积.

二、证明题：（共 6 小题，每小题 8 分，共 48 分）

11. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$.

12. 设 f 在 $x=0$ 连续，且对任何 $x, y \in R$ 有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ，证明： f 在 R 上连续.

13. 设 f 在 (a,b) 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = 0$. 证明： f 在 (a,b) 内有最大值或最小值.

14. 证明：若 f 在 $[A,+\infty)$ 上一致连续，且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

15. 设 $f(x)$ 为二阶可微函数, $F(x)$ 为可微函数.证明函数

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-at) + f(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)dz$$

满足弦振动方程

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 及初值条件 $u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = F(x)$.

16. 设 S 为光滑闭曲面，V 为 S 所围的区域。函数 $u(x,y,z)$ 在 V 与 S 上具有二阶连续偏导数，函数 $\omega(x,y,z)$ 偏导连续.证明：

(1) $\iiint\limits_V \omega \dfrac{\partial u}{\partial x} dxdydz = \oiint\limits_S u\omega dydz - \iiint\limits_V u \dfrac{\partial \omega}{\partial x} dxdydz$;

(2) $\iiint\limits_V \omega \Delta u dxdydz = \oiint\limits_S \omega \dfrac{\partial u}{\partial n} dS - \iiint\limits_V \nabla u \cdot \nabla \omega dxdydz$.

三、综合题：（共 2 小题，每小题 11 分，共 22 分）

17. 在区间 $1 \le x \le 3$ 内用线性函数 $a+bx$ 近似代替 $f(x) = x^2$, 试求 a,b 使得积分 $\int_1^3 (a+bx-x^2)^2 dx$ 取得最小值.

18. 判断并证明:若 $D \subset R^n$ 为任何闭集, $f: D \to D$,且存在正实数 $q \in (0,1)$,使得对任何 $x', x'' \in D$,满足 $\|f(x') - f(x'')\| \le q\|x' - x''\|$,则在 D 中是否存在 f 的唯一不动点 $f(x^*) = x^*$?