东华理工大学2017年硕士生入学考试初试试题

科目代码：818；科目名称：《高等代数》；（A卷）

适用专业（领域）名称：070100数学

一、（本题15分）

求满足下列性质的次数最低的多项式 $f(x)$：

$$x^2+1\mid f(x), x^3+x^2+1\mid f(x)+1.$$

二、（本题15分）

设 a 为实数，证明：多项式

$$f(x)=x^n+ax^{n-1}+\ldots+a^{n-1}x+a^n$$

最多有一个实根。

三、（本题20分）

（1）设 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}, B=(1)_{n\times n}$，证明：$|A+xB|=|A|+rx$，$\forall x$，其中 $r=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}$，$A_{ij}$ 是代数余子式.

（2）利用（1）的结论计算下列行列式的值：

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \ldots & a & a \\ -a & x & a & \ldots & a & a \\ -a & -a & x & \ldots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a & -a & -a & \ldots & x & a \\ -a & -a & -a & \ldots & -a & x \end{vmatrix}$$

四、（本题15分）

设 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$，计算 A^{2017}.

五、（本题15分）

设 $f(x)\in Z[x]$，Z 表示整数集合，若有整数 a，使得

$$f(a)=f(a+1)=f(a+2)=1$$

证明：对于任何整数 c，$f(c)\neq -1$.

六、（本题 20 分）

设 n 阶方阵 A,B,C 满足 $C=AB-BA$，且 C 与 A,B 可交换，证明：C 是幂零阵.

七、（本题 15 分）

设 A 是 4 阶幂零矩阵，且 A 的秩 $R(A)=3$，试求 A 与 A^2 的 $Jordan$ 标准形.

八、（本题 20 分）

设 A 是复数域上的 n 阶方阵，$f(x)\in C[x]$，$g(x)$ 是 A 的最小多项式，$(f(x),g(x))=d(x)$，证明：

（1）$R(d(A))=R(f(A))$，其中 R 是秩.

（2）$f(A)$ 可逆 $\Leftrightarrow (f(x),g(x))=1$.

九、（本题 15 分）

设 α,β,γ 是 3 维线性空间 V 的一组基，线性变换 φ 满足：

$$\begin{cases}\varphi(\alpha+2\beta+\gamma)=\alpha\\ \varphi(3\beta+4\gamma)=\beta\\ \varphi(4\beta+5\gamma)=\gamma\end{cases}$$

求 φ 在基 $\alpha,2\beta+\gamma,\gamma$ 下的矩阵.