东华理工大学2017年硕士生入学考试初试试题

科目代码：617；　科目名称：《数学分析》；（ A 卷）

适用专业（领域）名称：　070100 数学

一、计算题：（共10小题，每小题10分，共100分）

1. 求下列数列极限:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}).$$

2. 求下列函数极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right).$$

3. 计算不定积分 $\int\frac{x-5}{x^3-3x^2+4}dx.$

4. 求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 在点 $(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\ \frac{\sqrt{2}}{4}a)$ 处的切线方程和法线方程.

5. 确定幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{n}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}})x^{2n}$ 的收敛域，并求和函数.

6. 将函数 $f(x)=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2})\ (-\pi\le x\le\pi)$ 展开成傅里叶级数.

7. 若 $x+y-1=0$, 应用拉格朗日乘数法，求函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 的条件极值.

8. 试求方程 $u=f(x+u,yu)$ 所确定的函数的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$.

9. 计算曲线积分 $\int_L(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy$，其中 L 为上半圆周 $(x-a)^2+y^2=a^2, y\ge 0$, 沿逆时针方向.

10. 计算下列三重积分:

$$\iiint_{\Omega}z^2dxdydz,$$

其中Ω是两个球 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2\le 2Rz\,(R>0)$ 的公共部分.

二、证明题：（共 4 小题，每小题 10 分，共 40 分）

11．证明函数

$$F(y)=\int_0^{+\infty} e^{-(x-y)^2}dx$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

12. 设 $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$,证明存在 $\theta\in(\alpha,\beta)$，使得 $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}=\cot\theta$.

13．证明：若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，则 $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 必定收敛.

14. 设函数 $u(x,y)$ 在由封闭的光滑曲线 L 所围成的区域 D 上有二阶连续偏导数，试用格林公式证明：$\iint\limits_D (\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2})d\sigma = \int_L \dfrac{\partial u}{\partial n}ds$，其中 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 是 $u(x,y)$ 沿 L 外法线方向 n 的方向导数.

三、综合题：（共 1 小题，10 分）

15．设 $u=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^{\ 2} & x_2^{\ 2} & \cdots & x_n^{\ 2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{\ \text{n-1}} & x_2^{\ \text{n-1}} & \cdots & x_n^{\ \text{n-1}} \end{vmatrix}$，证明: $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\partial u}{\partial x_k}=0$.